Θέματα Επιχειρησιακών Ερευνών

24-10-17

Δυναμικός Προγραμματισμός

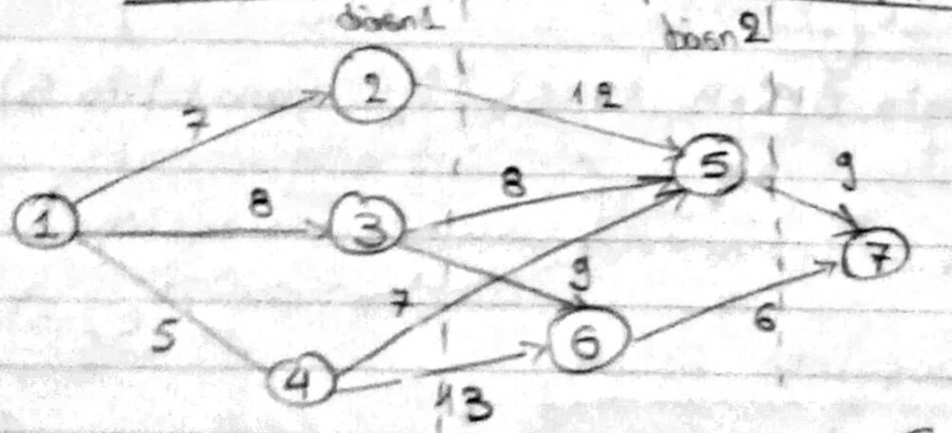
Παίρνω το μεγάλο πρόβλημα και το διασπώ σε μικρότερα προβλήματα/φάσεις/στάδια, τα οποία λύνω και έτσι λύνω το μεγάλο.

Σκεπτικό

Αρχή βελτιστοποίησης (1952)

- Μια βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα όποια και αν είναι η αρχική κατάσταση ή η αρχική απόφαση οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μια βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση, η οποία προκύπτει από την πρώτη απόφαση.
  - βιβλίο πιο ειδικό για την βελτιστοποίηση είναι τα εξής
    (1) Bellman (1957) Dynamic Programming
    (2) Bertsekas Dynamic Programming and optimal control, Βασιλείου

Πρόβλημα Συντομότερης Διαδρομής



$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν πάω από την πόλη } i \text{ στην πόλη } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$\min\{7x_{12} + 8x_{13} + 5x_{14} + \dots + 6x_{67}\}$ ← αντικειμενική συνάρτηση που θέλω να ελαχιστοποιήσω

$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$ (πόλη 1)

$x_{57} + x_{67} = 1$ (πόλη 7)

$x_{12} = x_{25}$ (πόλη 2)

$x_{13} = x_{35} + x_{36}$ (πόλη 3)

→ Φάση 1

Ξεκινώντας από τον αρχικό κόμβο η φάση 1 προσεγγίζει 3 τερματικούς κόμβους 2, 3, 4

- Συντομότερη διαδρομή από 1 στον 2 = 7
  -//- 3 = 8
  -//- 4 = 5

→ Φάση 2

- $\begin{pmatrix}\text{Συντομότερη διαδρομή} \\ \text{προς τον κόμβο 5}\end{pmatrix} = \min\limits_{i=2,3,4} \left\{ \begin{pmatrix}\text{μικρότερη} \\ \text{απόσταση} \\ \text{προς κόμβο } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{απόσταση} \\ \text{από τον κόμβο} \\ i \text{ προς τον} \\ \text{κόμβο 5}\end{pmatrix} \right\}$

$= \min\{7+12,\ 8+8,\ 5+7\} = 12$ (από κόμβο 4)

- $\begin{pmatrix}\text{Συντομότερη διαδρομή} \\ \text{προς κόμβο 6}\end{pmatrix} = \min\left\{ \begin{pmatrix}\text{μικρότερη} \\ \text{απόσταση προς} \\ \text{κόμβο } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{απόσταση} \\ \text{από κόμβο } i \\ \text{προς κόμβο 6}\end{pmatrix} \right\}$

$= \min\{8+9,\ 5+13\} = 17$ (από κόμβο 3)

→ Φάση 3

$\begin{pmatrix}\text{Συντομότερη διαδρομή} \\ \text{προς κόμβο 7}\end{pmatrix} = \min\limits_{i=5,6} \left\{ \begin{pmatrix}\text{μικρότερη} \\ \text{απόσταση από} \\ \text{κόμβο } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{απόσταση} \\ \text{από κόμβο} \\ i \text{ προς} \\ \text{κόμβο 7}\end{pmatrix} \right\}$

$= \min\{12+9,\ 17+6\} = 21$ (από κόμβο 5)

$1 \to 4 \to 5 \to 7$

{συντομότερη = μικρότερη}

Σχόλιο

→ Θα φτιάξω την αναδρομική σχέση

Ορίζω ως:

- $f_i(x_i)$ η συντομότερη διαδρομή προς τον κόμβο x_i κατά τη φάση
- $d(x_{i-1}, x_i)$ την απόσταση από τον κόμβο x_{i-1} στον x_i

$f_0(x_0 = 1) = 0$

$f_i x_i = \min\{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}$

για όλες τις εφικτές διαδρομές (x_{i-1}, x_i) $\quad i = 1, 2, 3$

Πίνακας {περίληψη της βέλτιστης διαδρομής}

$f_0(x_0=1)=0$

Φάση 1

x_1	$d(x_0,x_1)+f_0(x_0)$ $x_0=1$	βέλτιστη λύση	x_0^*
2	7	7	1
3	8	8	1
4	5	5	1

Φάση 2

x_2	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$\min\{d(x_2,x_1)+f_1(x_1)\}$	x_1^*
5	7+12	8+8	5+7	12	4
6	–	8+9	13+5	17	3

Φάση 3

x_3	$x_2=5$	$x_2=6$	$\min\{d(x_2,x_3)+f_2(x_2)\}$	x_2^*
7	12+9	17+6	21	5

ΣΟΣ

Σχόλιο: Κάναμε την βέλτιστη διαδρομή για την προς τα εμπρός διαδρομή, ξεκινήσαμε από τον κόμβο 1 για να φτάσουμε στον 7 χρησιμοποιώντας τον πιο σύντομο δρόμο.
Τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε από τον 7 για να φτάσουμε στον κόμβο 1. Να χρησιμοποιήσουμε την προς τα πίσω διαδρομή.

ο αλγόριθμος

$f_4(x_4=7)=0$

$f_i(x_i)=\min\{d(x_i,x_{i+1})+f_{i+1}(x_{i+1})\}$ $i=3,2,1$

για όλες τις διαδρομές οι οποίες είναι εφικτές (x_i,x_{i+1})

Φάση 3

x_3	$x_4=7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

Φάση 2

x_2	$x_3=5$	$x_3=6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12+9	–	21	5
3	8+9	9+6	15	6
4	7+9	13+6	16	5

Φάση 1

x_1	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	7+21	8+15	5+16	21	4

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δεν βασίζεται στον κύκλο

5+16

το βρίσκω στην φάση 2 που δόθηκε από τον κόμβο 5

Σχόλιο

Παρατήρηση

1->4->5->7

βελτιστη διαδρομή.

Πρόβλημα Σακιδίου

Έχουμε n αντικείμενα. Δυνατότητα μεταφοράς βάρους ω
ω_i το βάρος των i αντικειμένων
r_i το κέρδος από το αντικείμενο i (αριθμός)
m_i οι μονάδες του αντικειμένου i από σακίδιο

$$\max r_1 m_1 + \dots + r_n m_n$$
$$\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \dots + \omega_n m_n$$
$$m_1, m_2, \dots m_n \geq 0 \text{ ακέραιοι}$$

σχόλιο

Μπορεί να λυθεί με ακέραιο προγραμματισμό
όμως θα το λύσουμε με δυναμικό προγραμματισμό

1) Καταρχάς, πρέπει να χωρίσουμε φάσεις.
Η φάση i αναπαριστάται από το αντικείμενο i, $i=1,2,\dots n$
2) Οι εναλλακτικές αποφάσεις στη φάση i είναι το πλήθος των μονάδων των αντικειμένων i $(m_i = 0, 1, \dots [\frac{\omega}{m}])$
3) Η κατάσταση στη φάση i: x_i είναι το συνολικό βάρος που εισέρχεται στα αντικείμενα $i, i+1, \dots n$

$f_i(x_i)$ μέγιστη απόδοση για τα $i, i+1, \dots n$ δεδομένης της κατάστασης x_i

$$f_{n}(x_{n}) = 0$$
$$f_i(x_i) = \max_{m_i = 0, \dots [\frac{\omega}{\omega_i}]} \{ r_i m_i + f_{in}(x_{in}) \}$$

$$x_i = x_{i+1} + \omega_i m_i$$
$$x_{i+1} = x_i - \omega_i m_i$$

$$f_i(x_i) = \max_{m_i = 0, 1, \dots [\frac{\omega}{\omega_i}]} \{ r_i \omega_i + f_{i+1}(x_i - \omega_i m_i) \}$$
$$x_i \leq 0$$
$$i = 1, 2, \dots n$$

□

Παράδειγμα ①

$w = 4$ τόνοι

Αντικείμενο	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Μας ενδιαφέρει πόσα αντικείμενα να τύπου 1, 2, 3 να φορτώσω στο πλοίο χωρίς να ξεπεράσω τους 4 τόνους

Φάση 3 προϊόν 3

δηλώνει τον αριθμό αντικειμ. τύπου 3 που μπορώ να φορτώσω

Σχόλιο

x_3	$m_3=0$	$m_3=1$	$m_3=2$	$m_3=3$	$m_3=4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	–	–	–	–	0	0
1	0	14	–	–	–	14	1
2	0	14	28	–	–	28	2
3	0	14	28	42	–	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

$f_3(x_3) = \max(14 m_3)$ $\quad m_3 = 0, 1, \ldots 4$ $\quad w = 0, 1, \ldots \left[\frac{w=4}{w_3=1}\right] = 0, 1, \ldots 4$

Φάση 2 προϊόν 2

$$f_2(x_2) = \max\{47 m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\} \quad m_2 = 0, 1$$

x_2	$m_2=0$	$m_1=1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0+0	–	0	0
1	0+14	–	14	0
2	0+28	–	28	0
3	0+42	47+0=47	47	1
4	0+56	47+14=61	61	1

Παρατήρηση

Έχω φορτώσει 0 μονάδες από το προϊόν 2 άλλο έχω ήδη φορτώσει από το προϊόν 3

x_3 : ορίζουν το συνολικό βάρος που έχω φορτώσει μέχρι εκείνη τη στιγμή στο πλοίο $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$

$w = 0, 1, \ldots \left[\frac{w}{w_2}\right] = \frac{4}{3}$

$= 0, 1$

Σχόλιο

$$f_1(x_1) = \max\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$$

Φάση 1   προϊόν 1 $m_1 = 0,1,2$

x_1	$m_1=0$	$m_1=1$	$m_2=2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0+0	–	–	0	0
1	0+14	–	–	14	0
2	0+28	31+0=31	–	31	1
(*) 3	0+47	31+14=45	–	47	0
4	0+61	31+28=59	62+0=62	62	2

f_2

$\omega = 0,1,\ldots \left\lfloor \frac{\omega}{\omega_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor =$

Η ΛΥΣΗ!

Μέγιστο κέρδος: 62

x_1: πρέπει να φορτώσω όλο τα προϊόντα και στο πλοίο, για αυτό και θέλω το 4 → Σχόλια

x_2: πόσες μονάδες έχω φορτώσει από τα προϊόν 3 και το 2 Σχ

Αν είχα 3 τόνους χωρητικότητας και όχι 4 κοιτάω την (*) και επιστρέφω στη φάση 2 κοιτάω στο 47 και βλέπω ότι έχω φορτώσει 1 προϊόν τύπου 2

Σχολιασμός!

Παράδειγμα ②

Επιπρόσθετα ανθρωποχρόνια ζωής

Αριθμός ιατρικών ομάδων	Χώρα 1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το αποτέλεσμα

Σχόλιο

Οι φάσεις θα είναι οι χώρες

x_3 θα είναι το συνολικ

$n=3$

Φάση 3

x_3	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

$n=2$

Φάση 2

$$f_2(x_2)=\max_{m_2=0,\dots 5}\{P_2(m_2)+f_3(x_2-m_2)\}$$

x_2	$m_2=0$	$m_2=1$	$m_2=2$	$m_2=3$	$m_2=4$	$m_2=5$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0+50=50	20	–	–	–	–	50	0
2	0+70=70	20+50	45	–	–	–	70	0 ή 1
3	0+80=80	20+70	50+45	75	–	–	95	2
4	0+100=100	20+80	70+45	50+75	110	–	125	3
5	130	20+100	80+45	70+75	50+110	150	160	4

Φάση 1 $\quad f_1(x_1) = \max\{\varphi_1(m_1) + f_2(x_1 - m_1)\}$

$m_1=0$	$m_1=1$	$m_2=2$	$m_3=3$	$m_4=4$	$m_5=5$	$f_1(x_1)$	m_1^*
160	125+45	95+70	90+70	105+50	120+0	170	1

η λύση μας είναι : 170 = 125+45
1 ιατρική ομάδα στην πόλη 1 και
το 125 είναι από την φάση 2 που είναι
3 ιατρικές ομάδες στην πόλη 2 και
1 ιατρική ομάδα στην πόλη 3.

SOSARA

Άσκηση για το σπίτι

Ένας φοιτητής πρέπει να επιλέξει 10 προαιρετικά μαθήματα από 4 διαφορ. τμήματα με τουλάχιστον 1 μάθημα από κάθε τμήμα. Τα 10 μαθήματα κατανέμονται στα 4 τμήματα μ' ένα τρόπο, ο οποίος μεγιστοποιεί την γνώση.
Ο φοιτητής μετρά την γνώση σε μια κλίμακα με άριστα το 100 και καταλήγει στο ακόλουθο διάγραμμα.

τμήμα	πλήθος μαθημάτων						
	1	2	3	4	5	6	≥7
1	25	50	60	20	100	100	100
2	20	70	90	100	100	100	100
3	40	60	80	100	100	100	100
4	10	20	30	40	50	60	70

Με ποιον τρόπο ο φοιτητής θα πρέπει να επιλέξει τα μαθήματα;

0, 4